Вестник БГУ. Сер. 1. 2014. № 2

УДК 517.938.5

В. Ю. ТЫЩЕНКО

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ СЛОЕНИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ 1, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Рассмотрены вещественные вполне разрешимые (при $n > 2$) линейные дискретные динамические системы, определяющие сингулярные слоения коразмерности 1 в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n > 1$. Две системы данного класса называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм пространства $\mathbf{R}^n$, переводящий слои сингулярного слоения коразмерности 1, определяемого одной линейной дискретной динамической системой, в слои сингулярного слоения коразмерности 1, определяемого другой линейной дискретной динамической системой. Вводится понятие гиперболической вещественной вполне разрешимой линейной дискретной динамической системы. Показано, что такие системы являются системами общего положения. Получены необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности гиперболических вещественных вполне разрешимых линейных дискретных динамических систем. Доказано, что при $n = 3$ гиперболические вещественные вполне разрешимые линейные дискретные динамические системы структурно устойчивы. В случае $n = 2$ также вводится понятие гиперболической линейной дискретной динамической системы и получен критерий топологической эквивалентности таких систем. Доказано, что при $n = 2$ гиперболические вещественные линейные дискретные динамические системы структурно устойчивы.

Ключевые слова: вещественная линейная дискретная динамическая система; слоение коразмерности 1; топологическая эквивалентность.

Completely solvable (at $n > 2$) linear discrete dynamic systems, defining singular codimension one foliations in space $\mathbf{R}^n$, $n > 1$, are considered. Two systems of the given class are called topologically equivalent, if there is the homeomorphism of space $\mathbf{R}^n$, translating the leafs of the singular codimension one foliation, defined by one linear discrete dynamic system, into the leafs of the singular codimension one foliation, defined by other linear discrete dynamic system. The concept of hyperbolic real completely solvable linear discrete dynamic system is introduced. It is shown that such systems are general situation systems. Necessary and sufficient conditions of topological equivalence of hyperbolic real completely solvable linear discrete dynamic systems are received. It is proved that at $n = 3$ hyperbolic real completely solvable linear discrete dynamic systems are structurally stable. In a case $n = 2$ the concept of hyperbolic linear discrete dynamic system also is introduced and the criterion of topological equivalence of such systems is received. It is proved that at $n = 2$ hyperbolic real completely solvable linear discrete dynamic systems are structurally stable.

Key words: real linear discrete dynamic system; codimension one foliation; topological equivalence.

Для диффеоморфизмов основой топологической классификации обычно является отношение топологической сопряженности, в то время как для потоков (определяемых, например, автономными дифференциальными системами) топологическая классификация большей частью проводится на основании понятия топологической эквивалентности определяемых ими слоений (иногда называемой орбитальной топологической эквивалентностью). В [1] определена размерность инвариантных слоений голоморфных дискретных динамических систем. Это дает возможность проводить топологическую классификацию голоморфных дискретных динамических систем на основании определяемых ими слоений. В данной статье проведем топологическую классификацию слоений коразмерности 1 вполне разрешимых [2, с. 232] вещественных линейных дискретных динамических систем. Отметим, что вопросы топологической сопряженности вещественных линейных дискретных динамических систем рассматривались в [3, с. 95–106]. В комплексном же случае аналогичные проблемы (топологической сопряженности и топологической классификации) изучались в [3, с. 14–20] и [4].

Рассмотрим вещественные вполне разрешимые (при $n > 2$) невырожденные [1] линейные дискретные динамические системы (L^1) и (L^2), образованные линейными отображениями $A_j x$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $j = \overline{1, n-1}$, и $B_j x$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $j = \overline{1, n-1}$, соответственно, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$, матрицы $A_j \in GL(n, \mathbf{R})$ и $B_j \in GL(n, \mathbf{R})$, $j = \overline{1, n-1}$; начало координат O пространства R^n есть единственная неподвижная точка каждой из этих систем. Системы (L^1) и (L^2) будем называть ***топологически эквивалентными***, если существует гомеоморфизм $h: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, переводящий слои сингулярного слоения (т. е. такого слоения, у которого размерности слоев могут меняться при переходе от точки к точке), образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов [1, 5] системы (L^1), в слои сингулярного слоения, созданного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы (L^2).

Сначала рассмотрим случай $n > 2$. Здесь будем полагать, что матрицы A_j (матрицы B_j) имеют простую структуру и собственные значения λ_{kj} (собственные значения μ_{kj}) с ненулевыми действительными частями, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n-1}$. Кроме того, в этом случае будем считать, что у матриц $\left\| \lambda_{kj} \right\|_{n \times (n-1)}$ и $\left\| \mu_{kj} \right\|_{n \times (n-1)}$ все миноры порядка $n-1$ отличны от нуля (такие матрицы назовем ***невырожденными***).

В силу полной разрешимости системы (L^1) (системы (L^2)) приходим к выводу, что матрицы A_j (матрицы B_j), $j=\overline{1,n-1}$, в совокупности перестановочны. Поэтому с учетом простоты структуры матриц A_j, $j=\overline{1,n-1}$, систему (L^1) с помощью невырожденного линейного отображения пространства $\mathbf{R}^n$ приводим к системе (L^3), определяемой линейными отображениями

$$\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}\alpha_{1j} & \beta_{1j}\\ -\beta_{1j} & \alpha_{1j}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\alpha_{sj} & \beta_{sj}\\ -\beta_{sj} & \alpha_{sj}\end{pmatrix},\lambda_{2s+1,j},\ldots,\lambda_{nj}\right\}x,\ \forall x\in\mathbf{R}^n,\ \ j=\overline{1,n-1},$$

где собственные значения $\lambda_{kj}=\alpha_{kj}+i\beta_{kj}\in \mathrm{C}\backslash\mathrm{R}, i^2=-1,\ k=\overline{1,s},\ \lambda_{kj}\in\mathrm{R},\ k=\overline{2s+1,n},\ \ j=\overline{1,n-1}$. На основании алгоритма из [5] непосредственными вычислениями с учетом невырожденности матрицы $\left\|\lambda_{kj}\right\|_{n\times(n-1)}$ приходим к выводу, что система (L^3) определяет на R^n сингулярное слоение F^1:

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{s}\alpha_{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_{2k}}{x_{2k-1}}\right)\prod_{k=1}^{s}\left(x_{2k-1}^2+x_{2k}^2\right)^{\alpha_{2k-1}}\prod_{k=2s+1}^{n}\left|x_k\right|^{\alpha_k}=C>0,\ O_l,\ l=\overline{0,n-1},$$

где множества O_l слоев размерности l таковы: $O_0=O,\ \ O_l=\left(\cup\left\{x_{2i_\tau-1}=x_{2i_\tau}=0,\ \ i_\tau\in\{1,\ldots,s\},\ \ x_{i_\varsigma}=0,\right.\right.$ $\left.\left.i_\varsigma\in\{2s+1,\ldots,n\},\qquad \tau=\overline{0,\delta},\qquad \varsigma=\overline{0,\varepsilon},\ \ 2\delta+\varepsilon=n-l\right\}\right)\backslash\left(O_{l-1}\cap O_{l-2}\right),\ \ l=\overline{1,n-1}$. Принимая во внимание одномерные и двумерные инвариантные множества рассматриваемых нами линейных дискретных динамических систем, приходим к выводу, что необходимым условием топологической эквивалентности систем (L^1) и (L^2) является приведение системы (L^2) с помощью невырожденного линейного отображения пространства $\mathbf{R}^n$ к системе (L^4), образованной линейными отображениями

$$\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}\gamma_{1j} & \delta_{1j}\\ -\delta_{1j} & \gamma_{1j}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\gamma_{sj} & \delta_{sj}\\ -\delta_{sj} & \gamma_{sj}\end{pmatrix},\mu_{2s+1,j},\ldots,\mu_{nj}\right\}x,\ \forall x\in\mathbf{R}^n,\ \ j=\overline{1,n-1},$$

где собственные значения $\mu_{kj}=\gamma_{kj}+i\delta_{kj}\in\mathrm{C}\backslash\mathrm{R},\quad k=\overline{1,s},\ \mu_{kj}\in\mathrm{R},\ k=\overline{2s+1,n},\ \ j=\overline{1,n-1}$. Система (L^4) определяет на R^n сингулярное слоение F^2:

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{s}\beta_{2k}\operatorname{arctg}\frac{x_{2k}}{x_{2k-1}}\right)\prod_{k=1}^{s}\left(x_{2k-1}^2+x_{2k}^2\right)^{\beta_{2k-1}}\prod_{k=2s+1}^{n}\left|x_k\right|^{\beta_k}=C>0,\ O_l,\ l=\overline{0,n-1}.$$

Систему (L^3) (систему (L^4)), а значит и систему (L^1) (систему (L^2)), будем называть ***гиперболической***, если матрица $\left\|\lambda_{kj}\right\|_{n\times(n-1)}$ $\left(\text{матрица }\left\|\mu_{kj}\right\|_{n\times(n-1)}\right)$ невырождена и, кроме того, $\alpha_k\neq 0,\ \ k=\overline{1,n}$ $\left(\beta_k\neq 0,\ \ k=\overline{1,n}\right)$.

Далее с помощью замены g_1: $x_{2k-1}=\rho_k^{1/(2|\alpha_{2k-1}|)}\cos\varphi_k,\quad x_{2k-1}=\rho_k^{1/(2|\alpha_{2k-1}|)}\sin\varphi_k,\quad k=\overline{1,s}$, $x_k=\operatorname{sgn}y_k\left|y_k\right|^{1/|\alpha_k|},\ \ k=\overline{2s+1,n},\ \ \forall x\in\mathbf{R}^n$ (g_2: $x_{2k-1}=\rho_k^{1/(2|\beta_{2k-1}|)}\cos\varphi_k,\ \ x_{2k-1}=\rho_k^{1/(2|\beta_{2k-1}|)}\sin\varphi_k,\ \ k=\overline{1,s}$, $x_k=\operatorname{sgn}y_k\left|y_k\right|^{1/|\beta_k|},\ k=\overline{2s+1,n},\ \forall x\in\mathbf{R}^n$) – слоение F^1 (слоение F^2) переводим в гомеоморфное ему слоение F^3:

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{s}\alpha_{2k}\varphi_k\right)\prod_{k=1}^{s}\rho_k^{\operatorname{sgn}\alpha_{2k-1}}\prod_{k=2s+1}^{n}\left|y_k\right|^{\operatorname{sgn}\alpha_k}=C>0,\ g_1\left(O_l\right),\ l=\overline{0,n-1}$$

$$\left(F^4\text{: }\exp\left(\sum_{k=1}^{s}\beta_{2k}\varphi_k\right)\prod_{k=1}^{s}\rho_k^{\operatorname{sgn}\beta_{2k-1}}\prod_{k=2s+1}^{n}\left|y_k\right|^{\operatorname{sgn}\beta_k}=C>0,\ g_2\left(O_l\right),\ l=\overline{0,n-1}\right).$$

Рассмотрим сначала случай $2s=n$. Не умаляя общности, будем считать, что

$$\operatorname{sgn}\alpha_{2k-1}=\operatorname{sgn}\beta_{2k-1}=+1,\ k=\overline{1,s}\tag{1}$$

(поскольку в противном случае этого всегда можно добиться гомеоморфизмами вида $\rho_k\to\rho_k,\ \varphi_k\to\varphi_k-\dfrac{\operatorname{sgn}\alpha_{2k-1}-1}{\alpha_{2k}}\ln\rho_k,\ k=\overline{1,s}$, и $\rho_k\to\rho_k,\ \varphi_k\to\varphi_k-\dfrac{\operatorname{sgn}\beta_{2k-1}-1}{\beta_{2k}}\ln\rho_k,\ k=\overline{1,s}$).

При гомеоморфизме, определяющем топологическую эквивалентность слоений F^3 и F^4, слои $g_1(O_l)$ переходят в соответствующие им слои $g_2(O_l)$, $l=\overline{0,n-1}$. Поэтому, не умаляя общности, будем полагать, что при этом гомеоморфизме $(0,\dots,0,\rho_k,0,\dots,0)\to(0,\dots,0,\rho_k,0,\dots,0)$, $k=\overline{1,s}$ (в противном случае этого всегда можно добиться перенумерованием переменных ρ_k, $k=\overline{1,s}$, в слоении F^4). Также можно сделать вывод, что при данной топологической эквивалентности слоение

$$\rho_s = C\exp\left(-\sum_{k=1}^{s}\alpha_{2k}\varphi_k\right)\prod_{k=1}^{s-1}\rho_k^{-1},\ \rho_k>0,\ \varphi_k\in[0,2\pi),\ k=\overline{1,s},\ C>0, \tag{2}$$

переходит в слоение

$$\rho_s = C\exp\left(-\sum_{k=1}^{s}\beta_{2k}\varphi_k\right)\prod_{k=1}^{s-1}\rho_k^{-1},\ \rho_k>0,\ \varphi_k\in[0,2\pi),\ k=\overline{1,s},\ C>0. \tag{3}$$

Слоения (2) и (3) являются накрывающими [3, с. 4] с фазовым слоем [3, с. 5] $\mathbf{R}^+$ (множеством положительных вещественных чисел) и базой [3, с. 5] $\left(\mathbf{R}^+\times S^1\right)^{s-1}\times S^1$ (S^1 – единичная окружность). Непосредственными вычислениями на основании соотношений (2) и (3) приходим к выводу, что фазовые группы [3, с. 5] накрывающих слоений (2) и (3) порождаются образующими невырожденными отображениями $\exp(-2\pi\alpha_{2k})\rho_s$, $k=\overline{1,s}$, и $\exp(-2\pi\beta_{2k})\rho_s$, $k=\overline{1,s}$, соответственно. Теперь на основании теорем 1.2.1 [3, с. 8], 4.1.1 [3, с. 95] с учетом соответствия $(0,\dots,0,\rho_k,0,\dots,0)\to(0,\dots,0,\rho_k,0,\dots,0)$, $k=\overline{1,s}$, на основании вспомогательного гомеоморфизма $\rho_s\to\ln\rho_s$ приходим к выводу, что накрывающие слоения (2) и (3) топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\beta_{2k}=\varepsilon_k\nu\alpha_{2k},\ \varepsilon_k^2=1,\ k=\overline{1,s},\ \nu>0. \tag{4}$$

Далее непосредственными вычислениями убеждаемся, что при выполнении условий (4) гомеоморфизм $\rho_k\to\rho_k^{\nu}$, $\varphi_k\to\varepsilon_k\varphi_k$, $k=\overline{1,s}$, переводит слоение F^3 в слоение F^4, а значит, определяет их топологическую эквивалентность. Таким образом, соотношения (4) определяют необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности слоений F^3 и F^4.

Пусть теперь $2<2s<n$. Не умаляя общности, будем полагать, что в аналитическом задании слоения F^3 параметры $\operatorname{sgn}\alpha_k=+1$, $k=\overline{2s+1,m_1}$, $\operatorname{sgn}\alpha_k=-1$, $k=\overline{m_1+1,n}$ (слоения F^4 параметры $\operatorname{sgn}\beta_k=+1$, $k=\overline{2s+1,m_2}$, $\operatorname{sgn}\beta_k=-1$, $k=\overline{m_2+1,n}$). Учитывая, что при топологической эквивалентности сохраняется размерность инвариантных слоев, содержащих в своем замыкании образы неподвижной точки O, получаем, что

$$m_1=m_2 \tag{5}$$

является необходимым условием топологической эквивалентности слоений F^3 и F^4. Кроме того, с учетом возможности перенумерования переменных можно считать, что при гомеоморфизме, определяющем топологическую эквивалентность, $y_k\to y_k$, $k=\overline{2s+1,n}$. Далее аналогичным образом, как и в случае $2s=n$, будем полагать, что имеют место соотношения (1) и при вышеуказанном гомеоморфизме $(0,\dots,0,\rho_k,0,\dots,0)\to(0,\dots,0,\rho_k,0,\dots,0)$, $k=\overline{1,s}$. В итоге получаем, что соотношения (5) и (4) определяют необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности слоений F^3 и F^4.

В случае $s=1$, как и при $2<2s<n$, приходим к выводу, что (5) – необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности слоений F^3 и F^4.

И наконец, в случае $s=0$ также имеем, что соотношения (5) определяют необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности слоений F^3 и F^4.

Кроме того, на основании всех рассмотренных выше четырех случаев получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Гиперболические системы* (L^1) *при* $n>2$ *структурно устойчивы тогда и только тогда, когда* $s\le 1$.

Следствие 1. Гиперболические системы (L^1) при $n=3$ структурно устойчивы.

Рассмотрим теперь случай $n=2$. И здесь будем считать, что матрица A_1 (матрица B_1) имеет различные собственные значения λ_{11} и λ_{21} (собственные значения μ_{11} и μ_{21}). С учетом простоты структуры матрицы A_1 (матрицы B_1) систему (L^1) (систему (L^2)) с помощью невырожденного линейного отображения пространства $\mathbf{R}^2$ приводим к системе (L^3) (системе (L^4)), определяемой: 1) в случае вещественных собственных значений линейным отображением $\operatorname{diag}\{\lambda_{11},\lambda_{21}\}x,\ \forall x\in\mathbf{R}^2$ $(\operatorname{diag}\{\mu_{11},\mu_{21}\}x,\ \forall x\in\mathbf{R}^2)$; 2) в случае пары комплексно сопряженных – линейным отображением

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \beta_{11}\\ -\beta_{11} & \alpha_{11}\end{pmatrix}x,\ \forall x\in\mathbf{R}^2\ \left(\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \delta_{11}\\ -\delta_{11} & \gamma_{11}\end{pmatrix}x, \forall x\in\mathbf{R}^2\right),$$

где $\lambda_{11}=\alpha_{11}+i\beta_{11},\ \beta_{11}\neq 0$ $(\mu_{11}=\gamma_{11}+i\delta_{11},\ \delta_{11}\neq 0)$.

Непосредственными вычислениями приходим к выводу, что система (L^3) (система (L^4)) определяет на $\mathbf{R}^2$ в первом случае сингулярное слоение

$$F^3\colon |x_1|^{\alpha_1}|x_2|^{\alpha_2}=C>0,\ O\ (F^4\colon |x_1|^{\beta_1}|x_2|^{\beta_2}=C>0,\ O);$$

а во втором случае – сингулярное слоение

$$F^5\colon \left(x_1^2+x_2^2\right)^{\alpha_1}\exp\left(\alpha_2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right)=C\neq 0,\ O\ \left(F^6\colon\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\beta_1}\exp\left(\beta_2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right)=C>0,\ O\right).$$

Как и ранее, системы (L^1) и (L^3) (системы (L^2) и (L^4)) будем называть ***гиперболическими***, если $\alpha_1\alpha_2\neq 0$ $(\beta_1\beta_2\neq 0)$. Теперь на основании полученного аналитического задания слоений F^3 – F^6 получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Для того чтобы гиперболические системы* (L^1) *и* (L^2) *при* n = 2 *были топологически эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы либо* $(\lambda_{11}\in C\setminus R)\vee(\alpha_1\alpha_2<0)$, $(\mu_{11}\in C\setminus R)\vee(\beta_1\beta_2<0)$, *либо* $\alpha_1\alpha_2>0,\ \beta_1\beta_2>0$.

Следствие 2. Гиперболические системы (L^1) при n = 2 структурно устойчивы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тыщенко В. Ю. Об инвариантах дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 752–755.

2. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М., 2004.

3. Тыщенко В. Ю. Накрывающие слоения дифференциальных систем. Гродно, 2011.

4. Тыщенко В. Ю. О классификациях слоений, определяемых комплексными линейными и дробно-линейными дискретными динамическими системами // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 3. С. 125–130.

5. Тыщенко В. Ю. Базис абсолютных инвариантов вполне разрешимых линейных и дробно-линейных дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 758–760.

Поступила в редакцию 11.02.2013.

Валентин Юрьевич Тыщенко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Гродненского государственного университета им. Янки Купалы.